周期荷载激励下覆冰输电线的主共振及谐波共振分析

刘小会[1,2],杨曙光[2],蔡萌琦[3],邹明[2],孙测世[2]

(1. 重庆交通大学省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室,430074 重庆;
2. 重庆交通大学土木工程学院,430074 重庆;3. 成都大学建筑与土木工程学院,610106 成都)

摘　要:为了研究动态风对覆冰输电线非线性舞动特征的影响,在原有稳定风作用下覆冰输电线舞动控制方程中添加周期激励载荷,并建立了新的受迫-自激振动控制方程,该控制方程也适用于描述相邻档导线对舞动档导线运动特征的影响。运用多尺度法分别对弱激励和强激励下的受迫-自激振动求解,得到主共振和谐波共振的幅频响应函数,分析了受迫-自激系统的主共振、超谐波和亚谐波共振。研究表明:弱激励下的主共振,当调谐参数大于0时,风速或激励幅值的增加会使得响应幅值出现跳跃、多值等不稳定的非线性动力学行为,并呈现硬弹簧特征;强激励下的自激系统,当激励频率接近固有频率的整数倍和分数倍时,更容易出现2次超谐波共振和1/2次亚谐波共振;当发生1/2次亚谐波共振时,随着激励幅值的增大,响应幅值也不断增大,共振峰值对应的调谐参数趋向于正轴方向,呈现硬弹簧特征,风速的增加会增强系统的非线性和硬弹簧特征。

关键词:非线性振动;输电线舞动;主共振;谐波共振

中图分类号:TM753　　　**文献标志码:**A

Analysis of primary resonance and harmonic resonanceof ice-coated transmission line excited by periodic load

LIU Xiaohui[1,2],YANG Shuguang[2],CAI Mengqi[3],ZOU Ming[2],SUN Ceshi[2]

(1. State key laboratory of Bridges and Tunnels in Mountainous Areas,Chongqing Jiaotong University,430074 Chongqing,China;2. College of Civil Engineering,Chongqing Jiaotong University,430074 Chongqing,China;
3. College of Architecture and Civil Engineering,Chengdu University,610106 Chengdu,China)

Abstract: In order to study the influence of dynamic wind on the nonlinear galloping characteristics of ice-coated transmission lines,a periodic excitation load was added to the galloping govern equation of ice-coated transmission lines under the condition of stable wind,and a new forced-self-excited vibration govern equation was established. The equation is also suitable for describing the influence of adjacent gear wires on the motion characteristics of galloping gear wires. Using the method of multiple scales to solve the self-excited

收稿日期:2020-08-04　　　**修回日期:**2021-12-14
基金项目:国家自然科学基金资助(No. 51308570;51808085);重庆市自然科学基金资助(No. cstc2021jcyj-msxmX0166);重庆市科委基础与前沿项目资助(No. cstc2017jcyjAX0246);重庆市教委科学技术研究项目资助(No. KJ201600712182);重庆市研究生科研创新项目资助(No. CYS19240);重庆市创新训练项目资助(No. S201910618016)
通信作者:刘小会,副教授。E-mail:cqdxlxh@126.com
引用格式:刘小会,杨曙光,蔡萌琦,等. 周期荷载激励下覆冰输电线的主共振及谐波共振分析[J]. 应用力学学报,2022,39(1):54-64.
LIU Xiaohui,YANG Shuguang,CAI Mengqi,et al. Analysis of primary resonance and harmonic resonanceof ice-coated transmission line excited by periodic load[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(1):54-64.

system under weak excitation and strong excitation, respectively, the amplitude frequency function of the primary resonance and harmonic resonance is obtained, and the primary, super-harmonic and subharmonic resonances of the forced self-excited system are analyzed. The results show that the primary resonance under weak excitation, the increase of wind speed or excitation amplitude will enhance the hard spring characteristics and nonlinear characteristics of the system. In a self-excited system under strong excitation, when the excitation frequency is close to integer multiples and fractional multiples of the natural frequency, the 2 super-harmonic resonance and 1/2 subharmonic resonance are more likely to occur. When 1/2 subharmonic resonance occurs, as the excitation amplitude increases, the response amplitude also increases. The tuning parameter corresponding to the resonance peak inclines to the positive axis, showing hard spring characteristics, and the increase in wind speed enhance the nonlinearity and hard spring characteristics of the system.

Key words: nonlinear vibration; galloping; primary resonance; harmonic resonance

高压输电线是重要的能源输送渠道,关乎民生大计,保障高压输电线安全、有效和正常的运行十分必要。输电线舞动一直是一个热门的研究话题,在冰雪、雾凇、雪凇、下击爆流、台风、飓风等复杂的气候条件下,输电线极易覆冰,并在非定常风的激励下产生舞动。输电线舞动是低频率、大振幅的自激振动[1],可能会造成高压输电线闪络、短路、跳闸、断股、断线甚至倒塔的危害,因此输电线的舞动研究是一个重要的课题。

目前,输电线舞动的研究已经有了长足的发展。输电线舞动机理最早是由 Hartog[2] 提出在垂直方向发生的舞动。Benedettini 等[3] 基于高阶多尺度法研究了谐波激励下水平索的幅频响应曲线。文献[4-5]通过对覆冰输电线施加气动荷载,利用多尺度法和数值方法研究了系统参数和环境参数对临界风速和舞动幅值的影响;李黎等[6] 采用 ANSYS 有限元简化模型对覆冰输电线舞动做了静力分析,提出了输电线舞动研究的简化分析方法;曹化锦等[7] 运用 ANSYS 建立了输电塔及输电线的有限元模型,研究了不同风速舞动振幅和输电塔的动力响应。然而,上述研究大多以恒定风速为主,很少考虑动态风的作用。霍冰等[8] 考虑几何非线性和气动荷载,运用数值模拟发现相邻档作用下覆冰输电线在激励频率和固有频率接近时,系统表现出倍周期、概周期和混沌等复杂动力学行为;谢献忠等[9] 考虑几何非线性的影响,推导了两档输电线耦合振动的非线性动力学方程,运用数值方法分析了输电线的耦合振动特性和共振特性;刘海英等[10] 运用数值模拟研究了不同模态下几何非线性因素和风速对输电线模型的振动特性影响;赵莉[11] 运用 ABAQUS 建立了四分裂输电线体系的有限元模型,发现耐张档的舞动幅值和张力均大于直线档,特定风速下可造成断线和杆塔的破坏;闵光云等[12] 研究了不同的动张力简化计算方法会对覆冰输电线系统的频率、相位、和幅值造成影响。彭剑等[13] 运用 Hamilton 原理建立悬索控制方程,研究了时滞反馈作用下悬索的主共振响应。然而,上述研究很少考虑动态风或者相邻档的周期激励对输电线非线性振动特征的影响。

综上所述,本文考虑在稳定风作用下的覆冰输电线振动控制方程中添加周期荷载,模拟相邻档导线及动态气动荷载对舞动档导线的影响,运用多尺度法求解得到幅频响应函数,并进行主共振和谐波共振分析。

1 输电线舞动力学模型

覆冰输电线舞动的理论研究大多以单档导线为主[3-5],建立脉动风和相邻档导线运动的单档导线舞动模型如图 1 所示。

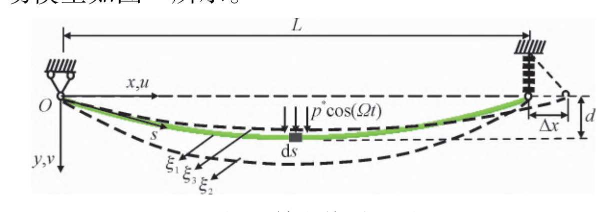


图 1 输电线平面图

Fig. 1 The plan of the transmission conductor

舞动档导线左端固定,右端悬挂在绝缘子串下端。相邻档导线运动会引起绝缘子串偏摆,进一步导致导线右端产生顺线路方向的位移。输电线为大跨度梁索结构,自重作用下的线形位于 O-xy 平面上,且用函数 y 表示,s 表示曲线的自然坐标;L 为输

电线的档距，H 为覆冰导线自重作用下的水平张力，垂度为 d；输电线在自重作用下的形状如图 1 中的构形 ξ_1，其精确形状为悬链线，弧垂一般小于 $L/8$。对于弧垂相对较小的输电线，其自重作用下的形状可以采用抛物线 $y=4d[x/L-(x/L)^2]$ 描述。在风荷载作用下，导线开始有竖向振动，如图 1 中的构形 ξ_2，此时导线竖向位移可以表示为 $v(s,t)$。输电线覆冰后，在风的激励下，输电线会发生竖向振动。相邻档作用于舞动档表现为发生径向位移变化 Δx，使得覆冰输电线由初始构形 ξ_1 变化成构形 ξ_3；$p^*\cos(\Omega t)$ 为竖直方向添加的周期均布荷载。令其变化后 x、y 方向上的位移函数分别为 $u(s,t)$、$v(s,t)$，取微段 ds 作为研究对象。基于现有理论，可以很容易给出稳定风作用下导线竖直向的运动方程[3]为

$$\left[Hv'+EA(y'+v')\int_0^l\left(y'v'+\frac{v'^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right]'-F_y-\mu\dot{v}=m\ddot{v} \tag{1}$$

式中：v' 为竖直方向运动函数对 x 的一次偏导；E 为输电线的弹性模量；A 为输电线的横截面积；y' 为抛物线方程对 x 的一次导数；$\dot{v}$ 和 $\ddot{v}$ 为竖直方向运动函数分别对时间 t 的一次和二次导数；F_y 为导线受到的气动荷载，与导线的覆冰形状、导线的运动速度等有关；μ 为结构阻尼；m 为单位长度的质量。

为了便于研究覆冰输电线的气动荷载，假定覆冰形状沿线路方向不变，且冰型为常见的新月形。选取覆冰导线的一个微段 ds，则该微段的气动力模型如图 2 所示。

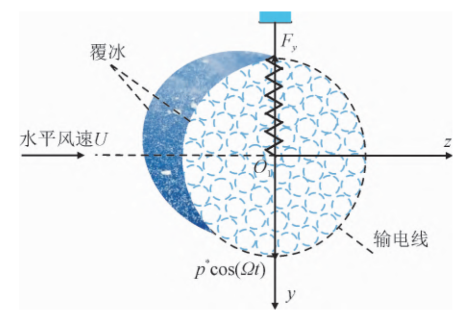


图 2 输电导线横截面图

Fig. 2 The cross section of the transmission conductor

选取图 1 中覆冰导线微段 ds 的横断面作为研究对象，以未产生振动时微段的质心平衡位置作为原点 O_1，以此建立参考坐标系 O_1-zy，O_1z 为水平轴，竖直向的 $p^*\cos(\Omega t)$ 为周期均布荷载。水平风以风速 U 作用在覆冰输电线上，风作为一种流体通过新月形覆冰截面，使得截面两侧通过的流体量不一致造成气压差，导致覆冰输电线会产生向上的升力 F_y，则竖直向升力可简化为[4]

$$F_y=\tilde{a}\dot{v}+\tilde{b}\dot{v}^3+\tilde{c}\dot{v}^2 \tag{2}$$

$$\tilde{a}=\frac{\rho UDA'}{2},\tilde{b}=\frac{\rho DB'}{2U},\tilde{c}=\frac{\rho DC'}{2} \tag{3}$$

式中：$\dot{v}$ 为竖直方向运动函数对时间 t 的一阶导数，即竖直向振动速度；ρ 和 D 分别为空气密度和输电线的直径；U 为风速，理论研究均认为风速为稳定风；A'、B'和 C'与导线受到的气动荷载有关，需通过风洞试验确定。因本文初始风攻角和输电线覆冰的冰型保持不变，则 A'、B'和 C'均为常数。由于 ρ 和 D 也为常数，即二次项拟合系数 $\tilde{c}$ 不随风速变化，因此本文不考虑气动荷载的二次项系数。

实际上，自然风是由稳定风和脉动风叠加而成的。自然风中的稳定部分使输电线产生自激振动，不稳定部分引起外部激励[14]。对于脉动风，一般认为服从高斯平稳随机过程，可以采用谐波叠加法模拟[15]。当仅仅考察频率为 Ω，幅值为 U_s 的脉动风作用，可以在式(1)中增加受迫激励项 $p^*\cos(\Omega t)$，其中 p^* 为周期荷载大小，与脉动风的大小、初始风攻角处的升力系数等有关。

如图 1 所示，相邻档导线运动会导致导线张力发生变化，进一步引起绝缘子偏摆；而绝缘子偏摆会使得舞动档导线端部产生顺线路方向位移 Δx。由于图 1 物理模型主要研究竖直方向的运动，因此不考虑输电线横向变形及几何非线性引起的附加弹性动张力，那么周期位移激励引起的附加弹性动张力为 $EAy''(x(L)-x(0))/L_S=\Delta xEAy''\cos(\Omega t)/L_S$[16]，其中 Ω 为端部位移激励的圆频率，$L_S=L[1+8(d/L)^2]$为考虑垂度的输电线长度。

因此，考虑到受迫-自激系统的一般性，对于自然风中的脉动风作用，可以将脉动风视为稳定风和周期简谐激励的组合；并且相邻档导线张力对舞动档的影响也可以视为稳定风和周期简谐激励的共同作用。那么将图 1 中的周期均布荷载 $p^*\cos(\Omega t)$ 添加到式(1)中，就可以模拟脉动风或者相邻档导线运动对输电线的影响，则该导线竖向的运动方程又可以写为

$$\left\{Hv'+EA(y'+v')\int_0^l[y'v'+v'^2/2]\mathrm{d}x\right\}'-F_y+p^*\cos(\Omega t)-\mu\dot{v}=m\ddot{v} \tag{4}$$

采用模态叠加法将 $v(x,t)$ 表示为特征函数 $f(x)$ 和时间函数 $q(t)$ 的乘积，即

$$v(x,t)=f(x)q(t) \tag{5}$$

将式(5)代入式(1)和式(4),可分别得到一个非线性常微分方程式(6)和式(7),则竖直向运动函数对 x 和时间 t 的导数分别为 $v'=f'(x)q(t)$, $\dot{v}=f(x)\dot{q}(t)$, $\ddot{v}=f(x)\ddot{q}(t)$,其中模态函数 $f(x)=\sin(n\pi x/L)$。由于线路舞动主要以第一阶模态为主,因此取模态函数中 $n=1$。为了使方程便于计算,采用 Galerkin 方法将覆冰导线舞动的控制方程化简得到非线性常微分方程

$$\ddot{q}+\omega^2 q+c_1q^2+c_2q^3+(\mu^*+c_3)\dot{q}+c_4\dot{q}^3=0 \tag{6}$$

在式(6)中添加简谐激励项得到

$$\ddot{q}+\omega^2 q+c_1q^2+c_2q^3+(\mu^*+c_3)\dot{q}+c_4\dot{q}^3=p\cos(\Omega t) \tag{7}$$

其中

$$\begin{cases}\omega^2=\dfrac{1}{m}\dfrac{I_0}{I_m},c_1=12\dfrac{dEA}{ml^3}\dfrac{I_1}{I_m},c_2=\dfrac{EA}{2ml}\dfrac{I_2}{I_m}\\ \mu^*=\dfrac{\mu}{m},c_3=\dfrac{a}{m},c_4=\dfrac{b}{m}\dfrac{I_b}{I_m},p=\dfrac{p^*}{m}\dfrac{I_p}{I_m}\end{cases} \tag{8}$$

对于式(6),参数 ω 为输电线系统的固有频率;由于 p^* 考虑成竖直方向的均布荷载,因此受迫项的模态函数 $f_1(x)=1$;I 的值取决于模态函数 $f(x)$,其定义如下。

$$\begin{cases}I_0=H\int_0^l f'^2\mathrm{d}x+64\dfrac{d^2EA}{l^5}\left(\int_0^l f\mathrm{d}x\right)^2\\ I_1=\int_0^l f'^2\mathrm{d}x\int_0^l f\mathrm{d}x,I_2=\left(\int_0^l f'^2\mathrm{d}x\right)^2\\ I_m=\int_0^l f^2\mathrm{d}x,I_b=\int_0^l f^4\mathrm{d}x,I_p=\int_0^l ff_1\mathrm{d}x\end{cases} \tag{9}$$

在式(6)中,对于弱非线性自治系统,针对方程中二次、三次非线性项,乘以小量 ε 起到限制幅值的作用,则

$$q=\varepsilon\bar{q},\mu^*=\varepsilon\bar{\mu},\dot{q}=\varepsilon\dot{\bar{q}},\dot{q}^3=\varepsilon\dot{\bar{q}},p=\varepsilon\bar{p} \tag{10}$$

式中 $\bar{q}$、$\bar{\mu}$、$\dot{\bar{q}}$、$\bar{p}$ 为系统新变量,为了方便公式标注,下文仍用 q、μ、$\dot{q}$、p 来表示。将式(10)代入式(6)中可得

$$\ddot{q}+\omega^2q+\varepsilon[c_1q^2+c_2q^3+(\mu^*+c_3)\dot{q}+c_4\dot{q}^3]=\varepsilon p\cos(\Omega t) \tag{11}$$

2 弱激励下的主共振及分析

由于覆冰导线的气动参数需要试验测定,所以选用文献[17]的几何参数、材料参数和相应的气动力参数为:张力 $H=30$ kN;跨度 $L=125.88$ m;弹性模量 $E=47.803\ 3$ GPa;直径 $D=28.6$ mm;单位长度质量 $m=2.379$ kg/m;横截面积 $A=423.24$ mm^2;空气密度 $\rho=1.292\ 9$ kg/m^3;风速 $U=4.0$ m/s;垂度 $d=1.543\ 2$ m;竖直向阻尼 $\mu=5\times10^{-4}$;空气动力系数[1] $A'=-0.166\ 7$;空气动力系数[3] $B'=8.358\ 1$。

式(7)在稳定风作用下的覆冰输电线控制方程中增加了周期激励载荷,该周期激励即可以用来描述脉动风的谐波激励对舞动的影响,又可以用来描述相邻档导线的影响。为了使得本文研究更具有一般意义,接下来将进行详细的参数分析,考察该周期激励的幅值和频率的影响。本节先研究系统的主共振,即受迫激励的自激系统中外激励频率 Ω 接近该系统的固有频率 ω 时的共振。对于弱非线性阻尼系统,给系统施加受迫激励,比较小的激励幅值 p 就能激发出强烈的共振,因此对于系统阻尼、外激励幅值和频率乘以小量 ε 进行限幅,取 $\varepsilon=0.1$,式(11)即为接近共振的受迫振动,将 q 展开成 ε 的幂级数为

$$q(t,\varepsilon)=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1) \tag{12}$$

偏微分算子符号为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=D_0+\varepsilon D_1 \tag{13}$$

$$\Omega=\omega+\varepsilon\sigma \tag{14}$$

式中 σ 为激励频率的调谐参数。将式(12)和式(13)代入式(11)后按照相应小量阶次进行划分可得到

$$D_0q_0{}^2+\omega^2q_0+\varepsilon[D_0{}^2q_1+\omega^2q_1+2D_0D_1q_0+c_1q_0^2+c_2q_0{}^3+(\mu+c_3)D_0q_0+c_4(D_0q_0)^3-p\cos(\Omega t)]=0 \tag{15}$$

式中 D_k 为对 T_k 求偏导数。通过将 ε 同次幂系数进行划分后得到一组关于 $\varepsilon^n(n=0,1)$ 的线性偏微分方程

$$D_0^2q_0+\omega^2q_0=0 \tag{16}$$

$$D_0^2q_1+\omega^2q_1=-[D_0{}^2q_1+2D_0D_1q_0+c_1q_0{}^2+c_2q_0{}^3+(\mu+c_3)D_0q_0+c_4(D_0q_0)^3-p\cos(\Omega t)] \tag{17}$$

方程(16)的解为

$$q_0=A(T_1)\mathrm{e}^{i\omega T_0}+\bar{A}(T_1)\mathrm{e}^{-i\omega T_0} \tag{18}$$

$$A(T_1)=1/2a(T_1)\mathrm{e}^{i\beta(T_1)} \tag{19}$$

将式(13)、式(14)和式(18)代入式(17),然后分离久期项得到对应的一阶微分算子为

$$D_1A=\frac{3ic_2}{2\omega}A^2\bar{A}-\frac{3c_4}{2}\omega^2A^2\bar{A}-\frac{\mu+c_3}{2}A-\frac{ip}{4\omega}\mathrm{e}^{i\sigma T_1} \tag{20}$$

联合式(13)、式(19)和式(20),然后分离实部

和虚部可得到系统振幅和相位的变化率方程

$$\begin{cases} \dot{a} = \dfrac{-(\mu + c_3)}{2}a - \dfrac{3}{8}c_4\omega^2 a^3 + \dfrac{p}{2w}\sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a\dot{\beta} = \dfrac{3c_2}{8\omega}a^3 - \dfrac{p}{2\omega}\cos(\sigma T_1 - \beta) \end{cases} \quad (21)$$

引入 $\gamma = \sigma T_1 - \beta$，为了确定式(21)振幅和相位的稳态解，令 $D_1 A = 0$，得到

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\mu + c_3}{2}a + \dfrac{3}{8}c_4\omega^2 a^3 - \dfrac{p}{2\omega}\sin\gamma \\ 0 = \sigma a - \dfrac{3c_2}{8\omega}a^3 + \dfrac{p}{2\omega}\cos\gamma \end{cases} \quad (22)$$

整理式(22)得到相位角和幅值的关系式，并且消掉关系式中的 γ 得到幅频响应方程

$$\frac{p^2}{4\omega^2 a^2} = \left(\sigma - \frac{3c_2 a^2}{8\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mu + c_3}{2} + \frac{3\omega^2 c_4 a^2}{8}\right)^2 \quad (23)$$

对于自激-受迫系统，采用多尺度法求解得到弱激励下主共振响应的幅频函数关系。为了验证本文幅频函数解析解推导结果的正确性，取激励频率 Ω 等于受迫-自激系统的固有频率 ω，调谐参数 $\sigma = 0$，风速 $U = 4$ m/s，用数学软件 Maple 绘出解析解式(23)关于激励幅值和响应幅值的曲线。运用文献[18]中 Matlab 数值法求解式(7)得到激励幅值$p^* =$ 3.736 N/m，7.472 N/m，11.208 N/m，14.944 N/m，18.680 N/m的时程位移图，分别对应振幅稳定时的幅值如图(3)中的点 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5，其中激励幅值 p^* 经过式(8)和式(9)将转换得到图 3 中横坐标激励幅值 p 的形式。本文的响应幅值 a 为实际值，单位为 m。

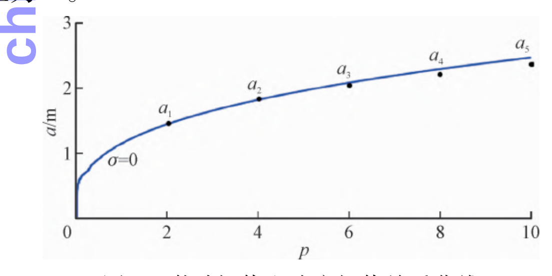


图 3　激励幅值和响应幅值关系曲线

Fig. 3　The curve between excitation amplitude and response amplitude

由图 3 可以看出，Matlab 求得的数值解和运用多尺度法求解得到的幅频响应函数曲线吻合较好；然而响应幅值大于 2 时，幅频响应曲线的误差从 $p^* = 11.208$ N/m 的 2.98% 增加到 $p^* = 18.680$ N/m 的 5.42%。因此，响应幅值大于 2，且激励幅值继续增大时，解析解的误差会增大，但仍然可以进行幅频曲线的分析。从图 3 还可以看出，调谐参数 $\sigma = 0$ 的受迫-自激系统，随着激励幅值的增大，响应幅值也逐渐增大，但响应幅值增大得越来越缓慢。

在自激-受迫系统中，周期激励频率的变化会使得该系统发生复杂的共振形式，为了防止自激-受迫系统不产生主共振、超谐波和亚谐波共振，令激励频率 $\Omega = \omega/4$。用 Maple 绘出式(23)关于激励幅值与响应幅值的图像。取风速 $U = 4$ m/s，分别取调谐参数 $\sigma = 0, -0.5, -0.8, -1.0, -1.2$ 和 $\sigma = 0, 0.5, 0.8, 1.0, 1.2$ 带入式(23)，得到不同调谐参数下的激励幅值和响应幅值曲线，如图 4 所示。

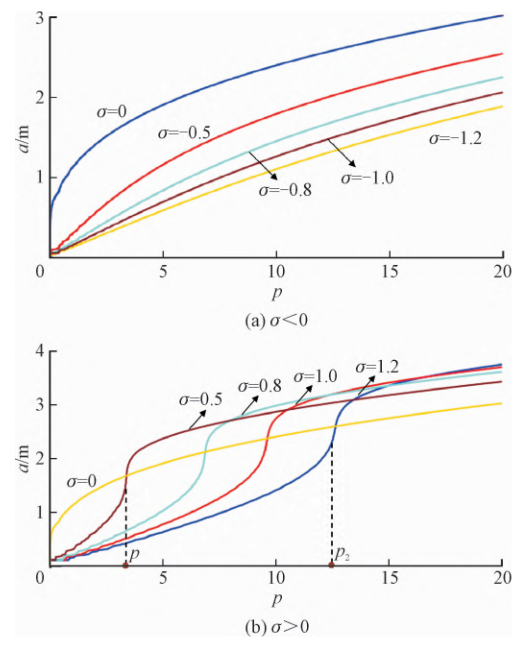


图 4　不同调谐参数下的激励幅值和响应幅值曲线

Fig. 4　The curves of excitation amplitude and response amplitude under different tuning parameters

由图 4 可以看出：当 σ 的绝对值从 0 开始增大时，响应幅值随着激励幅值的增大而增大；当 $\sigma < 0$，且调谐参数变小时，响应幅值随激励幅值的增加，增加幅度开始减小；当 $\sigma = 0.5$ 时，响应幅值随激励幅值的增加在 p 点发生突变；当调谐参数继续变大，发生突变的点从 $\sigma = 0.5$ 的 p 点变化到 $\sigma = 1.2$ 的 p_2 点。则调谐参数从 0 开始变大时，响应幅值发生突变所对应的激励幅值增大。

取 $\sigma = 0.5$，风速 $U = 4$ m/s，8 m/s，12 m/s，16 m/s，20 m/s 分别带入式(23)，得到不同风速下的激励幅值和响应幅值曲线，如图 5 所示。

由图 5 可以看出：当风速 $U = 4$ m/s 时，对应曲线的响应幅值随着激励幅值增大到 p_A 会发生突变；当风速 U 增大到 8 m/s，12 m/s，16 m/s，20 m/s 时，响应幅值出现跳跃现象，并且不稳定区域从 $U =$

8 m/s的 r_1 扩大到 $U=12$ m/s 的 r_2、$U=16$ m/s 的 r_3、$U=20$ m/s 的 r_4 区域；$\sigma=0.5$ 时，在相同参数情况下，随着风速的增加，响应幅值增加的幅度越来越小，并且导致响应幅值发生的跳跃的区间和不稳定区域增加的幅度也越来越小。

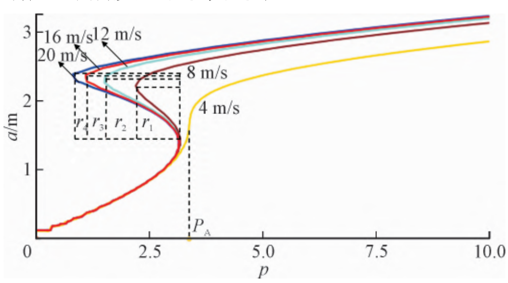


图 5 不同风速下的激励幅值和响应幅值曲线

Fig. 5 The curves of excitation amplitude and response amplitude under different wind speeds

综上所述，当 $\sigma=0$ 时，响应幅值随着激励幅值的增大而增大，但响应幅值增大得越来越缓慢。当 $\sigma<0$ 时，响应幅值随着激励幅值的增大而缓慢增大；随着调谐参数的不断减小，响应幅值随激励幅值的增加，其增加的幅度逐渐减小。$\sigma>0$ 时，随着调谐参数增大，响应幅值发生突变所对应的激励幅值逐渐变大；响应幅值在风速为 4 m/s 时发生突变，风速的增加会使得响应幅值出现多值、跳跃现象和不稳定区域；并且随着风速的增大，该不稳定区域也逐渐增大，增大的幅度却逐渐减小。

为了分析风速和调谐参数同时变化时激励幅值和幅值响应函数关系的特征，将图 4(b) 中 $\sigma=0.5$，0.8，1.0，1.2 对应曲线所对应的风速分别从 4 m/s 修改为 8 m/s、12 m/s、16 m/s 和 20 m/s，得到不同风速和调谐参数下的激励幅值和响应幅值曲线，如图 6 所示。

可以看出，图 5 和图 6 的不稳定区域相互对应，其中 r_1 和 r_1^* 区域是等价的。为了使得图 6 标注不出现混乱，将图 5 中的不稳定区域原有矩形改成了三角形。在风速变大和调谐参数从小增大的共同作用下，相比于图 4(b) 和图 5：幅值响应的变化幅度增加；响应幅值发生跳跃的区间增大；不稳定区域也从图 5 的 r_2、r_3、r_4 变化到图 6 的 r_2^*、r_3^*、r_4^* 区域。显然，在风速增大和调谐参数从 0 不断增大的情况下，受迫-自激系统的响应幅值出现多值、跳跃现象更加明显，且系统变得更加不稳定。图 5 和图 6 均出现了不稳定区域，并且均对应着调谐参数大于 0 和风速变化的情况。风速的增大，表现为非线性阻尼项增强，随着激励幅值的增加，受迫-自激系统中出现响应幅值不稳定区域增大，出现多值、跳跃、不稳定的现象增加。

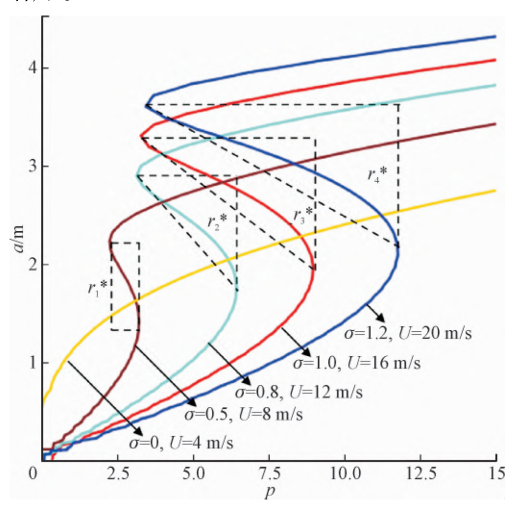


图 6 不同风速和调谐参数下的激励幅值和响应幅值曲线

Fig. 6 The curves of excitation amplitude and response amplitude under different wind speeds and tuning parameters

对自激-受迫系统幅频函数关系的分析是受迫振动的一种重要研究方法。取风速 $U=4$ m/s，激励幅值 $p^*=0.187$，1.494，3.036，5.604，9.340 N/m，用 Maple 绘出式(23)得到的幅频曲线，如图 7 所示。由于式(23)中响应幅值均为 a^2 或其高次幂的形式，因此幅频曲线在响应幅值 a 的负半轴有关于调谐参数轴的另一部分对称曲线。为了更加直观地表现响应幅值的变化，只取正半轴进行分析，并且下文的幅频曲线均取响应幅值正半轴图像进行研究。由图 7 可以看出，随着激励幅值的增大，响应幅值的共振峰值也逐渐增大，激励幅值的增加对响应幅值的增加有着直接的影响，且共振峰值趋向于调谐频率的正轴方向。

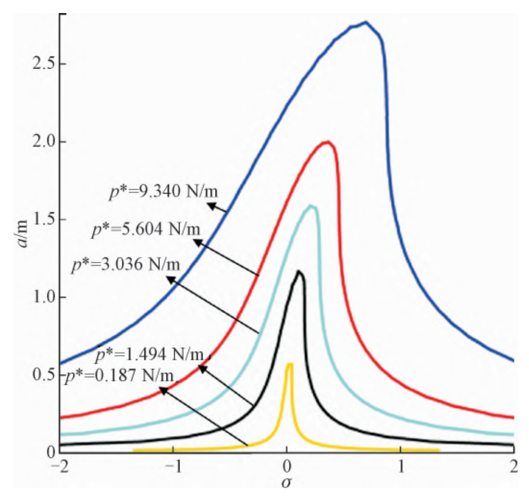


图 7 不同激励幅值下的幅频曲线

Fig. 7 The amplitude-frequency curve under different excitation amplitude

3 强激励下的谐波共振及分析

覆冰输电线弱非线性系统在强激励作用下,当激励项频率接近系统固有频率的分数倍和整数倍时,系统会产生远离主共振的谐波共振,包括超谐波共振和亚谐波共振。将式(11)改写为远离共振的受迫振动,则舞动方程为

$$\ddot{q}+\omega^2 q+\varepsilon[c_1q^2+c_2q^3+(\mu^*-c_3)\dot{q}+c_4\dot{q}^3]=p\cos(\Omega t) \tag{24}$$

将式(12)和式(13)代入式(24)后,其中受迫项相位结合式(14)又可以设为 $\Omega=\xi+\varepsilon\sigma$,按照相应小量阶次进行划分可得到

$$D_0q_0{}^2+\omega^2q_0-p\cos(\xi T_0+\varepsilon\sigma T_1)+\varepsilon[D_0{}^2q_1+w^2q_1+2D_0D_1q_0+c_1q_0{}^2+c_2q_0{}^3+(\mu+c_3)D_0q_0+c_4(D_0q_0)^3]=0 \tag{25}$$

式中 D_k 表示对 T_k 求偏导数。通过将 ε 同次幂系数进行划分后得到一组关于 $\varepsilon^n(n=0,1)$ 的线性偏微分方程

$$D_0^2q_0+\omega^2q_0=p\cos(\xi T_0+\varepsilon\sigma T_1) \tag{26}$$

$$D_0^2q_1+\omega^2q_1=-[2D_0D_1q_0+c_1q_0{}^2+c_2q_0{}^3+(\mu+c_3)D_0q_0+c_4(D_0q_0)^3] \tag{27}$$

式(26)的解为

$$q_0=A(T_1)e^{i\omega T_0}+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}+Be^{i\Omega t_0}+\bar{B}e^{-i\Omega t_0} \tag{28}$$

上式中 A 和 B 可分别表示为

$$\begin{cases}A(T_1)=\dfrac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)}\\ B=\dfrac{P}{2|\omega^2-\Omega^2|}\end{cases} \tag{29}$$

将式(28)代入式(27)得到

$$\begin{aligned}D_0^2q_1+\omega^2q_1=&-2i\omega D_1(Ae^{i\omega t}+Be^{i\Omega t})-c_1[A^2e^{2i\omega t}+A\bar{A}+B\bar{B}+2ABe^{i(\omega+\Omega)t}+2A\bar{B}e^{i(\omega-\Omega)t}+B^2e^{2i\Omega t}]-\\&c_2[A^3e^{3i\omega t}+B^3e^{3i\Omega t}+6AB\bar{B}e^{i\omega t}+6A\bar{A}Be^{i\Omega t}+3A^2\bar{A}e^{i\omega t}+3A^2Be^{i(2\omega+\Omega)t}+3B^2\bar{B}e^{i\Omega t}+\\&3AB^2e^{i(\omega+2\Omega)t}+3\bar{A}^2Be^{i(\Omega-2\omega)t}+3B^2\bar{A}e^{i(2\Omega-\omega)t}]-(\mu+c_3)(i\omega Ae^{i\omega t}+i\Omega Be^{i\Omega t})-\\&c_4[6i\omega^2A\bar{A}Be^{i\Omega t}-i\omega^3A^3e^{3i\omega t}-i\Omega^3B^3e^{3i\Omega t}+3i\omega^3A^2\bar{A}e^{i\omega t}+6i\omega\Omega^2AB\bar{B}e^{i\omega t}+3i\Omega^3B^2\bar{B}e^{i\Omega t}-\\&3i\Omega\omega^2A^2Be^{i(2\omega+\Omega)t}-3i\omega\Omega^2B^2Ae^{i(2\Omega+\omega)t}-3i\omega\Omega^2A\bar{B}^2e^{i(\omega-2\Omega)t}-3i\Omega\omega^2B\bar{A}^2e^{i(\Omega-2\omega)t}]+cc\end{aligned} \tag{30}$$

由(28)式可知不发生共振的条件为

$$\Omega\neq\omega+\varepsilon\sigma_1,\Omega\neq2\omega+\varepsilon\sigma,\Omega\neq3\omega+\varepsilon\sigma,$$
$$\Omega\neq\frac{1}{2}\omega+\varepsilon\sigma,\Omega\neq\frac{1}{3}\omega+\varepsilon\sigma$$

分别对应着不发生主共振、亚谐波共振和超谐波共振的条件。

3.1 1/2 次亚谐波共振

当激励频率等于系统固有频率的 2 倍时,系统会产生 1/2 次亚谐波共振,令式(30)中 $\Omega=2\omega+\varepsilon\sigma$,可得到系统振幅和相位变化率的方程为

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{-(\mu+c_3)}{2}a-\dfrac{3}{8}\omega^2c_4a^3-\dfrac{c_4p^2}{3\omega^2}a-\dfrac{pc_1}{6\omega^3}a\cdot\sin(\sigma T_1-\beta)\\ a\dot{\beta}=\dfrac{3}{8\omega}c_2a^3+\dfrac{c_2p^2}{12\omega^5}a+\dfrac{pc_1}{6\omega^3}a\cdot\cos(\sigma T_1-\beta)\end{cases} \tag{31}$$

令上式中 $\gamma=\sigma T_1-\beta$,$D_1A=0$,整理式(31)得到相位角和幅值的关系式,并且消掉关系式中的 γ 得到幅频响应方程为

$$\left(\frac{pc_1}{6\omega^3}a\right)^2=\left(\frac{\mu+c_3}{2}a+\frac{3}{8}\omega^2c_4a^3+\frac{p^2}{3\omega^2}c_4a\right)^2+\left(\sigma a-\frac{3c_2}{8\omega}a^3-\frac{c_2p^2}{12\omega^5}a\right)^2 \tag{32}$$

取风速 $U=4$ m/s,激励幅值 $p^*=0.747$ N/m,1.868 N/m,3.736 N/m;3.736 N/m,14.944 N/m,28.020 N/m,46.700 N/m;46.700 N/m,65.380 N/m,78.456 N/m,84.060 N/m 代入幅频函数关系式(32),然后用 Maple 分别得到 1/2 次亚谐波幅频曲线,如图 8 所示。其中:图 8(a)中 $p^*=3.736$ N/m 对应的曲线与图 8(b)中对应的曲线一致;图 8(b)中 $p^*=46.700$ N/m 对应的曲线与图 8(c)中对应的曲线一致。取激励幅值 $p^*=1.868$ N/m,风速 $U=4$ m/s,8 m/s,12 m/s,16 m/s,20 m/s 代入幅频函数式(32),然后用 Maple 得到 1/2 次亚谐波幅频曲线,如图 9 所示。

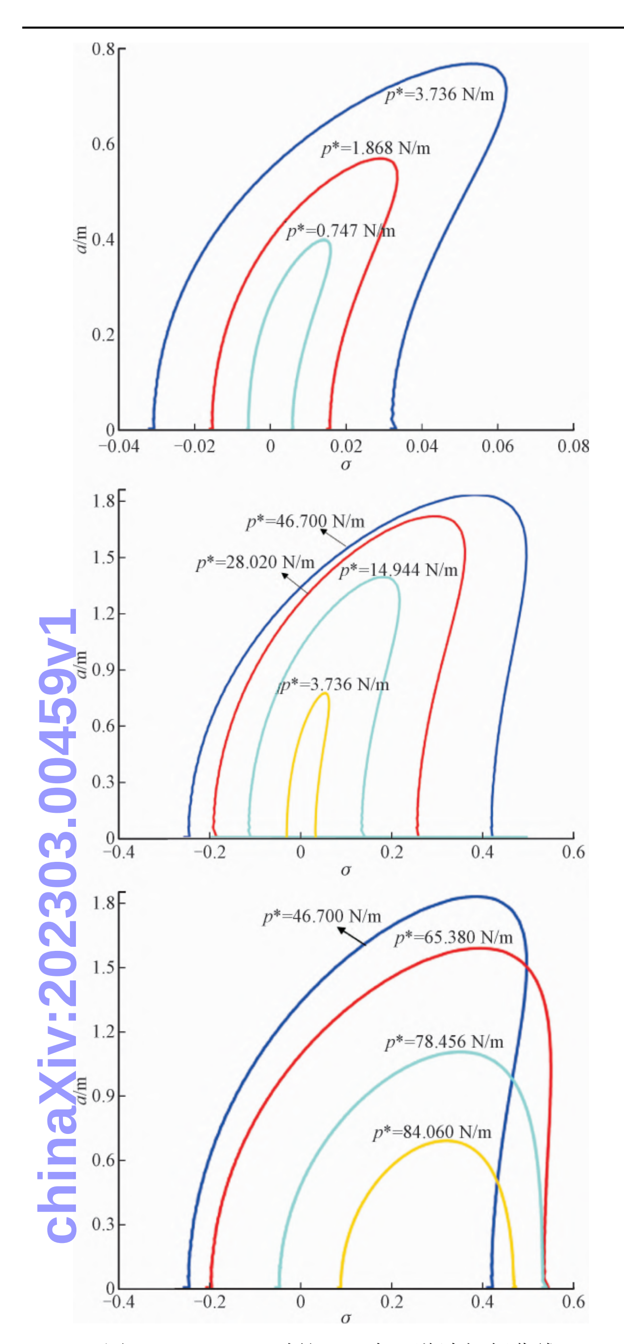


图 8　$U=4$ m/s 时的 1/2 次亚谐波幅频曲线

Fig. 8　The 1/2 subharmonic amplitude-frequency curves with $U=4$ m/s

由图 8 可以看出：当激励幅值 $p^*=0.747$ N/m 时，系统产生 1/2 次亚谐波共振；随着激励幅值的不断增大，共振幅值也随着增大，并且幅频曲线的共振峰值所对应的调谐参数向着正方向偏移，表明系统在激励幅值增大的过程中呈现硬弹簧特性；当激励幅值增加到 $p^*=46.700$ N/m 时，继续增大激励幅值，共振峰值会减小；其中激励幅值 $p^*=3.736$ N/m 与激励幅值 $p^*=84.606$ N/m 对应共振峰值基本一致。由图 9 可以看出，在同一激励幅值 $p^*=1.868$ N/m 下，不同风速对应不同的曲线；与图 8 相比，风速对响应幅值的影响更大。因此，当系统产生 1/2 次亚谐波共振时，风速的增加会使得响应幅值产生更加剧烈的影响，系统趋向于硬弹簧特征和非线性振动特征增强，不稳定区域增大。

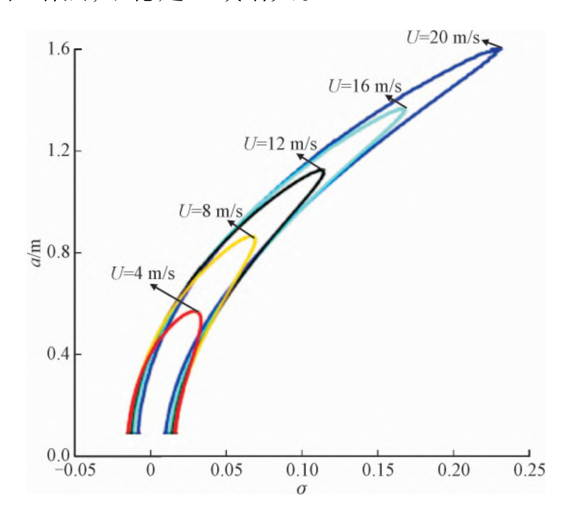


图 9　$p^*=1.868$ N/m 时的 1/2 次亚谐波幅频曲线

Fig. 9　The 1/2 subharmonic amplitude-frequency curve with $p^*=1.868$ N/m

综上，周期激励下的小垂度单档覆冰输电线，当激励频率为系统固有频率的 2 倍时，激励幅值 $p^*=0.747$ N/m 时系统就会产生 1/2 次亚谐波共振；在风速和其他条件不变的情况下继续增加激励幅值，共振峰值会向着调谐参数正方向发生偏移，出现硬弹簧的特征；并且共振峰值随着激励幅值的不断增大，出现先增大后减小的特征。在上述系统中考虑风速的影响时，风速的增加会使得系统响应幅值出现更加剧烈的非线性特征。

3.2　2 次超谐波共振

当激励频率为系统固有频率的 1/2 倍时，系统会产生 2 次超谐波共振，令式(30)中 $\Omega=\omega/2+\varepsilon\sigma$，可得到系统振幅和相位变化率的方程为

$$\begin{cases} \dot{a}=\dfrac{-(\mu+c_3)}{2}a-\dfrac{3}{8}\omega^2c_4a^3-\dfrac{c_4p^2}{3\omega^2}a+\\ \quad\dfrac{4c_1p^2}{3\omega^5}\cdot\sin(\sigma T_1-\beta) \\ a\dot{\beta}=\dfrac{3}{8\omega}c_2a^3+\dfrac{4c_2p^2}{3\omega^5}a+\dfrac{4c_1p^2}{3\omega^5}\cdot\cos(\sigma T_1-\beta) \end{cases} \tag{33}$$

令 $\gamma=\sigma T_1-\beta, D_1A=0$，整理式(33)得到相位角和幅值的关系式，并且消掉关系式中的 γ 得到幅频响应方程为

$$\left(\frac{4c_1p^2}{9\omega^5}\right)^2=\left(\sigma a-\frac{3}{8\omega}c_2a^3-\frac{4c_2p^2}{3\omega^5}a\right)^2+\left(\frac{\mu+c_3}{2}a+\frac{3}{8}\omega^2c_4a^3+\frac{c_4p^2}{3\omega^2}a\right)^2 \quad (34)$$

3.3 3 次超谐波共振

当激励频率等于系统固有频率的 1/3 倍时，系统会产生 3 次超谐波共振，令式(30)中 $\Omega=\omega/3+\varepsilon\sigma$，可得到系统振幅和相位变化率的方程

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{-(\mu+c_3)}{2}a-\dfrac{3}{8}\omega^2c_4a^3-\dfrac{27p^2}{256\omega^2}c_4a+\\ \dfrac{c_4}{81}\cdot\dfrac{729p^3}{409\ 6\omega^4}\cos(\sigma T_1-\beta)+\\ 3c_2\cdot\dfrac{729p^3}{409\ 6\omega^7}\sin(\sigma T_1-\beta)\\ a\dot{\beta}=\dfrac{3}{8\omega}c_2a^3+\dfrac{243c_2p^2}{256\omega^5}a-\\ \dfrac{c_4}{81}\cdot\dfrac{729p^3}{409\ 6\omega^4}\sin(\sigma T_1-\beta)+\\ 3c_2\cdot\dfrac{729p^3}{409\ 6\omega^7}\cos(\sigma T_1-\beta)\end{cases} \quad (35)$$

令上式中 $\gamma=\sigma T_1-\beta, D_1A=0$，整理式(35)得到相位角和幅值的关系式，并且消掉关系式中 γ 得到幅频响应方程

$$\left(\frac{81c_4p^3}{409\ 6\omega^4}\right)^2+\left(\frac{2\ 187c_2p^3}{409\ 6\omega^7}\right)^2=\left(\frac{\mu+c_3}{2}a+\frac{3}{8}\omega^2c_4a^3+\frac{27p^2}{256\omega^2}c_4a\right)^2+\left(\sigma a-\frac{3}{8\omega}c_2a^3-\frac{243c_2p^2}{256\omega^5}a\right)^2 \quad (36)$$

取风速 $U=4$ m/s，激励幅值 $p^*=0.934$ N/m，3.736 N/m，6.538 N/m；6.538 N/m，14.944 N/m，22.416 N/m，29.888 N/m，代入式(34)得到 2 次超谐波幅频曲线，如图 10 所示。其中，图 10(a)的 $p^*=6.358$ N/m 对应的曲线与图 10(b)中对应的曲线一致。取激励幅值 $p^*=7.472$ N/m，14.944 N/m，16.812 N/m，18.680 N/m 代入式(36)得到 3 次超谐波幅频曲线，如图 11 所示。

由图 10 可以看出，幅频曲线出现锯齿状，主要表现为该调谐参数左右领域内对应幅频函数响应幅值变化率发生突变。正如图 5 中，在调谐参数 $0<\sigma<0.5$ 之间，存在一个调谐参数值其左右领域内对应幅频函数的响应幅值变化率发生突变。由图 10 还可以看出：当激励幅值 $p^*\leqslant 6.538$ N/m 时，响应幅值随着激励幅值的增加而增加；当激励幅值 $p^*\geqslant 6.538$ N/m 时，响应共振峰值不仅随着激励幅值的增加而增加，并且共振峰值所对应的调谐参数也向着正方向发生偏移，呈现硬弹簧特性。由图 11 可以看出，当激励幅值 $p^*\geqslant 7.472$ N/m 时，随着激励幅值逐渐增加，响应幅值也出现和 2 次超谐波幅频曲线一致的现象，系统的响应幅值不断增加，并且也呈现硬弹簧特性。

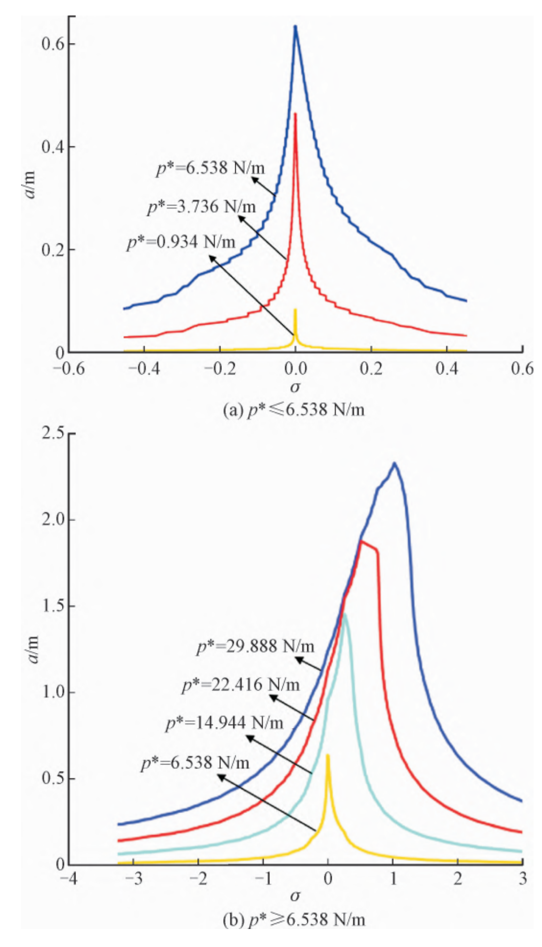


图 10 2 次超谐波幅频曲线

Fig. 10 The two super-harmonic amplitude-frequency curve

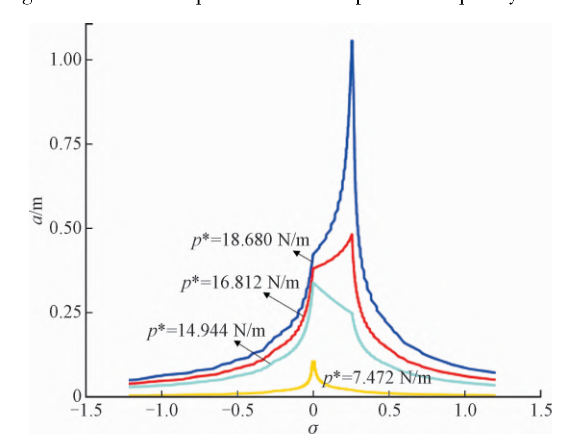


图 11 3 次超谐波幅频曲线

Fig. 11 The three super-harmonic amplitude-frequency curve

综上,2 次和 3 次超谐波幅频曲线在风速不变的情况下,随着激励幅值的不断增加,系统响应幅值的共振峰值也不断增大,并且共振峰值向着调谐参数正轴方向偏移,呈现硬弹簧特性。

3.4 1/3 次亚谐波共振

当激励频率为系统固有频率的 3 倍时,系统会产生 1/3 次亚谐波共振。令式(30)中 $\Omega=3\omega+\varepsilon\sigma$,可得到系统振幅和相位变化率的方程为

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{-(\mu+c_3)}{2}a-\dfrac{3}{8}\omega^2c_4a^3-\dfrac{27c_4p^2}{256\omega^2}a-\\\quad\dfrac{3c_2p}{64\omega^3}a^2\sin(\sigma T_1-\beta)+\dfrac{9c_4p}{64}a^2\cos(\sigma T_1-\beta)\\a\dot{\beta}=\dfrac{3}{8\omega}c_2a^3+\dfrac{3c_2p^2}{256\omega^5}a+\dfrac{3c_2p}{64\omega^3}a^2\cos(\sigma T_1-\beta)+\\\quad\dfrac{9c_4p}{64}a^2\sin(\sigma T_1-\beta)\end{cases}\tag{37}$$

令式中 $\gamma=\sigma T_1-\beta$, $D_1A=0$,整理式(37)得到相位角和幅值的关系式,并且消掉关系式中 γ 得到幅频响应方程为

$$\frac{9p^2a^4}{4\,096}\left(9c_4^{\ 2}+\frac{c_2^{\ 2}}{\omega^6}\right)=\left(\frac{\mu+c_3}{2}a+\frac{3}{8}\omega^2c_4a^3+\frac{27c_4p^2}{256\omega^2}a\right)^2+\left(\sigma a-\frac{3c_2}{8\omega}a^3-\frac{3c_2p^2}{256\omega^5}a\right)^2\tag{38}$$

风速取 $U=4$ m/s,将激励幅值 $p^*=54.172$ N/m, 56.040 N/m, 84.060 N/m, 93.400 N/m, 112.080 N/m 代入式(38),利用 Maple 函数得到 1/3 次亚谐波幅频曲线,如图 12 所示。由于 1/3 次亚谐波的激励幅值大于主共振激励幅值的数倍,因此激发 1/3 次亚谐波共振十分困难,作为一般性研究设计可以选择不用考虑。

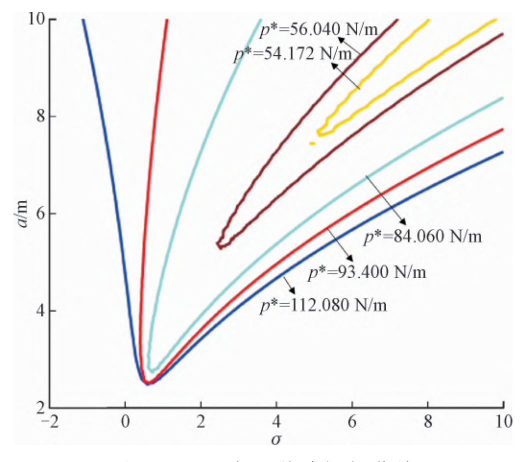


图 12 1/3 次亚谐波幅频曲线

Fig. 12 The 1/3 subharmonic amplitude-frequency curve

由图 12 可知,1/3 亚谐波的响应幅值也是随着激励幅值的增大而逐渐增大,并且伴随着响应幅值出现不稳定的现象,当激励幅值达到 112.080 N/m 时,系统响应幅值也出现了与 1/2 次亚谐波幅频曲线相同的现象,响应幅值开始减小。

综上所述,当风速 $U=4$ m/s 时,对于周期激励下的覆冰输电线的谐波共振:当激励频率接近于固有频率的 1/2 倍和 2 倍时,激励幅值在 $p^*=0.934$ N/m 的周期荷载激励下就能激发 2 次超谐波共振和 1/2 次亚谐波共振,并且响应幅值随着激励幅值的增大不断增加,共振峰值会向着调谐参数正轴方向发生偏移,显现出硬弹簧的特征;风速的变化会使得系统 1/2 次亚谐波共振现象更加剧烈和硬弹簧特征更加明显。然而,相比于 2 次超谐波共振和 1/2 次亚谐波共振,激励频率接近于固有频率的 1/3 倍和 3 倍时,系统产生 3 次超谐波共振和 1/3 次亚谐波共振所对应的激励幅值的初始条件更高,3 次超谐波共振所对应的激励幅值 $p^*=7.472$ N/m,1/3 次亚谐波共振所对应的激励幅值 $p^*=54.172$ N/m,其中 3 次超谐波共振的响应幅值的峰值随着激励幅值的增加显现出与 2 次超谐波共振类似的特征;由于激发 1/3 次亚谐波共振的激励幅值过大,作为一般性研究设计可以选择不用考虑。

4 结 论

1)弱激励下产生主共振的受迫-自激输电线系统:系统中激励幅值的增大对响应幅值的增大起着直接作用;并且当调谐参数为正时,激励幅值和风速的增加会使得系统呈现硬弹簧特征,响应幅值发生跳跃、多值等不稳定的非线性振动现象。

2)强激励下产生谐波共振的受迫-自激输电线系统:激励频率接近固有频率整数倍和分数倍时,更容易出现 2 次超谐波共振和 1/2 次亚谐波共振;其中 1/2 次亚谐波共振呈现硬弹簧特征,风速和激励幅值的增加会增强系统的非线性。由于激发 1/3 次亚谐波共振的激励幅值过大,作为一般性工程设计和应用,可不予考虑。

3)在相同的外界风速和参数条件下,相比于超谐波共振,系统产生亚谐波共振响应幅值增加的幅度更大,响应幅值的共振峰值会随着激励幅值的增大而出现先增大后减小的现象。

参考文献

[1] LIU X H, LIU L, CAI M Q, et al. Free vibration of transmission lines with multiple insulator strings using refined models[J]. Applied mathematical modelling, 2019, 67: 252-282.

[2] HARTOG J P D. Transmission line vibration due to sleet[J]. Transactions of the American institute of electrical engineers, 1932, 51(4): 1074-1076.

[3] BENEDETTINI F, REGA G. Non-linear dynamics of an elastic cable under planar excitation[J]. International journal of non-linear mechanics, 1987, 22(6): 497-509.

[4] 张华彪. 输电线路舞动的非线性动力学研究[D]. 天津:河北工业大学, 2008.

[5] 李欣业, 张华彪, 侯书军, 等. 覆冰输电导线舞动的仿真分析[J]. 振动工程学报, 2010, 23(1): 76-85. (LI Xinye, ZHANG Huabiao, HOU Shujun, et al. Theoretical and numerical analysis of galloping of iced power transmission lines[J]. Journal of vibration engineering, 2010, 23(1): 76-85(in Chinese)).

[6] 李黎, 曹化锦, 肖鹏, 等. 输电线覆冰舞动的简化分析方法[J]. 工程力学, 2011, 28(增刊2): 152-156. (LI Li, CAO Huajin, XIAO Peng, et al. Simplified analysis method of ice-coated transmission conductors galloping[J]. Engineering mechanics, 2011, 28(S2): 152-156(in Chinese)).

[7] 曹化锦, 李黎, 姜维, 陈元坤. 输电塔-线体系舞动仿真及控制研究[J]. 振动与冲击[J], 2011, 30 (12): 245-249. (CAO Huajin, LI Li, JIANG Wei, etal. Simulation and control for galloping of a transmission tower-line system[J]. Journal of vibration and shock. 2011, 30(12): 245-249(in Chinese)).

[8] 霍冰, 刘习军, 张素侠. 相邻档距作用下覆冰导线舞动的复杂运动响应[J]. 工程力学, 2016, 33(5): 249-256. (HUO Bing, LIU Xijun, ZHANG Suxia. Complex response of galloping for an iced transmission line considering excitation of adjacent span[J]. Engineering mechanics, 2016, 33(5): 249-256(in Chinese)).

[9] 谢献忠, 龙昊, 李丹. 两档输电线路间的非线性耦合振动特性研究[J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(3): 170-176. (XIE Xianzhong, LONG Hao, LI Dan. Study on nonlinear coupled vibration characteristic of two-spans transmission line system[J]. Journal of dynamics and control, 2015, 13(3): 170-176(in Chinese)).

[10] 刘海英, 张琪昌, 郝淑英. 基于强几何非线性因素的覆冰导线舞动问题研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(4): 84-89. (LIU Haiying, ZHANG Qichang, HAO Shuying. Iced conductor galloping based on strong geometric nonlinear factors[J]. Journal of vibration and shock, 2014, 33(4): 84-89(in Chinese)).

[11] 赵莉, 严波, 吕欣, 等. 输电塔线体系导线舞动过程中的振幅和张力[J]. 中国电力, 2014, 47(10): 71-76. (ZHAO Li, YAN Bo, LÜ Xin, et al. Vibration amplitudes and tensions of conductors during galloping in transmission tower-line system[J]. Electric power, 2014, 47(10): 71-76(in Chinese)).

[12] 闵光云, 刘小会, 孙测世, 等. 动张力简化方法对输电线舞动的影响研究[J]. 应用力学学报, 2020, 37(4): 1717-1723. (MIN Guangyun, LIU Xiaohui, SUN Ceshi, et al. Study on the influence of simplification method of dynamic tension on the galloping of transmission line[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(4): 1717-1723(in Chinese)).

[13] 彭剑, 李禄欣, 赵珧冰, 等. 轴向时滞反馈控制下悬索非线性响应分析[J]. 应用力学学报, 2018, 35(1): 81-85. (PENG Jian, LI Luxin, ZHAO Yaobing, et al. Nonlinear responses of suspended cables with a longitudinal time-delay feedback control[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2018, 35(1): 81-85(in Chinese)).

[14] ZULLI D, LUONGO A. Bifurcation and stability of a two-tower system under wind-induced parametric, external and self-excitation[J]. Journal of sound and vibration, 2012, 331(2): 365-383.

[15] 司敏, 陈波, 刘元志, 等. 斜拉人行桥多维脉动风荷载模拟研究[J]. 武汉理工大学学报, 2014, 36(8): 82-87. (SI Min, CHEN Bo, LIU Yuanzhi, et al. Simulation on the multi-dimensional pulse wind loading of a large span cable-stayed pedestrian bridge[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2014, 36(8): 82-87(in Chinese)).

[16] 李凤臣. 大跨度桥梁斜拉索的参数振动及索力识别研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2009.

[17] ZHANG Q, POPPLEWELL N, SHAH A H. Galloping of bundle conductor[J]. Journal of sound and vibration, 2000, 234(1): 115-134.

[18] 刘小会, 闵光云, 孙测世, 等. 直接法与间接法对拉索耦合内共振的影响研究[J]. 应用力学学报, 2020, 37(3): 1088-1098. (LIU Xiaohui, MIN Guangyun, SUN Ceshi, et al. Influence of direct method and indirect method on internal resonance of cable[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(3): 1088-1098(in Chinese)).

(编辑　黄崇亚)